

Dr MATE STRUNJE
Tehnološki fakultet
Zagreb
Dr BOŽIDAR TEPEŠ
Filozofski fakultet
Zagreb

Znanost u prometu
Prethodno priopćenje
UDK: 519.8:658.6+656
Primljeno: 10.05.1989.
Prihvaćeno: 27.06.1989.

PRIMJENA MATEMATIČKOG MODELA PRI UPRAVLJANJU ZALIHAMA U PROMETNOJ RADNOJ ORGANIZACIJI

SAŽETAK

Skladištenje rezervnih dijelova u radnim organizacijama prometne privrede predstavlja veliki problem. Matematički model predložen u ovom radu predstavlja veliki znanstveni doprinos rješenju skladištenja rezervnih dijelova u radnim organizacijama prometne privrede.

UVOD

Poslovanje bilo kojega normalnog poduzeća nezamislivo je bez određene količine zaliha (pojedinih dijelova za autobuse, kamione i dr.). No, postoje i brojne organizacije koje imaju veću količinu robe na zalihama, što im predstavlja određeni problem.

Funkcija zalihe robe jest da osigura neprekidan rad prometnih sredstava, a pritom se mora strogo voditi računa o tome da robe na zalihama bude u optimalnoj količini, jer su veće ili male količine robe na zalihama rezultati lošeg poslovanja. Da bi zaliha uvijek bila optimalna, potrebno je često obavljati matematičku analizu gotovih zaliha u skladištu. Da bi se to moglo uspješno obaviti, potrebno je izvršiti stručnu obradu dobivenih informacija o količini rezervnih dijelova u skladištu. Dakle, nakon snimanja postojećeg stanja prilazi se izradi odgovarajućega matematičkog algoritma za upravljanje zalihama u okviru operacionih istraživanja.

IZGRADNJA MATEMATIČKOG MODELA

Za uspješan rad nekoga prijevoznog sredstva potrebno je imati na zalihama odgovarajuće dijelove u potrebnim količinama. "Potrošnja" pojedinog dijela ovisi s jedne strane o planu tekućeg održavanja, a s druge strane o kvaru koji može nastati potpuno slučajno (stohastički).

Dakle, kvar pojedinog dijela sredstva potpuno je slučajna pa je teško predvidjeti

optimalnu količinu dijelova u skladištu. Može se postaviti pitanje: što je bolje imati manju ili veću količinu rezervnih dijelova u skladištu, jer i jedno i drugo proizvodi samo gubitke.

Problem je u tome što je vijek trajanja svakoga pojedinog dijela stohastičan, jer ne postoje valjane informacije o vremenskoj duljini trajanja rada dotičnog dijela sredstva. Da bi se ipak došlo do neke valjane informacije o duljini trajanja rada pojedinih dijelova, potrebno je savjesno pratiti eksploataciju dotičnog dijela i odrediti vjerojatnost njegova trajanja.

Da bi se mogao izraditi matematički model, uvode se odgovarajući parametri, koji će biti pokazatelji uspješnosti rada neke prometne radne organizacije.

Neka su:

- n - broj rezervnih dijelova u skladištu,
 - m - broj traženih rezervnih dijelova,
 - r - optimalne zalihe,
 - $P_{(m)}$ - vjerojatnost potrošnje m (0, 1, 2, ...) dijelova
 - Q_1 - troškovi nabavljanja i održavanja jednoga rezervnog skladišta
 - Q_2 - troškovi koji nastaju kada stroj ne radi,
 - $T_{(n)}$ - ukupni troškovi stvaranja zaliha.
- Planiranje potrošnje rezervnih dijelova (m) u nekom vremenskom razdoblju (jedna godina) može biti takvo da se zalihe (n) postupno smanjuju i da u jednom trenutku broj dijelova iznosi $n - m$.

Ako se dogodi da je potrošnja veća od planirane, u skladištu će biti manjak ($m - n$) dijelova. Ako je $m < n$, nastaju troškovi ($n - m$) Q_1 . Ako se zna kolika će biti potražnja m , troškovi će za bilo koju količinu zaliha " n " i potrošnju " m " biti:

$$Q_2 \sum_{m=0}^n (n - m) P_{(m)} \quad (1)$$

Ako je $m > n$, nastaju troškovi ($m - n$)

Q_1 , a za bilo koji broj "m" i "n" bit će:

$$Q_1 \sum_{m=0}^n (m-n) P_{(m)} \quad (2)$$

Ukupni troškovi za cjelokupne zalihe bit će:

$$T_{(n)} = Q_1 \sum_{m=0}^n (m-n) P_{(m)} + Q_2 \sum_{m=0}^n (n-m) P_{(m)} \quad (3)$$

Potrošnja rezervnih dijelova "m" može biti funkcija diskretnog ali i kontinuiranog tipa s funkcijom gustoće vjerojatnosti $f(m)$.

Izraz:

$$\int_{m_1}^{m_2} f(m) dm$$

predstavlja vjerojatnost da se potrošnja "m" nalazi u intervalu $[m_1, m_2]$. Ako je $m < n$, onda je vjerojatnost dana izrazom:

$$F_{(n)} = \int_0^n f(m) dm$$

Ukupni troškovi cjelokupne zalihe za kontinuiranu slučajnu varijablu dobiju se iz relacije (3) (koja vrijedi za diskretne zadane vrijednosti m).

$$T_{(n)} = Q_1 \int_0^n (n-m) f(m) dm + Q_2 \int_0^n (m-n) f(m) dm \quad (4)$$

Ako se traži optimalizacija zaliha za koje su troškovi minimalni, dobije se diferenciranje izraza (4).

$$\begin{aligned} T'_{(n)} &= Q_1 \int_0^n f(m) dm - Q_2 \int_n^{\infty} f(m) dm = \\ &= Q_1 F_{(n)} - Q_2 [1 - F_{(n)}] = Q_1 F_{(n)} + Q_2 F_{(n)} - Q_2 = \\ &= (Q_1 + Q_2) F_{(n)} - Q_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Uvjet da izraz (5) ima minimalne troškove, tj. $n = r$, bit će ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

$$T'_{(n)} = 0 \quad i \quad T''_{(n)} > 0 \quad (6)$$

Iz relacije (5) slijedi da je:

$$F_{(n)} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \quad (7)$$

Ako izraz (4) ima minimalne troškove, onda ih ima samo ako je ispunjen uvjet (7).

Iz relacije (5) slijedi da je:

$$T''_{(n)} = (Q_1 + Q_2) F'_{(n)} = (Q_1 + Q_2) f(n)$$

Zbog uvjeta (6) bit će:

$$(Q_1 + Q_2) f(r) > 0$$

Kako je $f(r) > 0$, onda Q_1 i Q_2 istodobno nisu jednaki nuli, pa funkcija $T_{(n)}$ ima minimum za relaciju (7).

Ako se radi o funkciji potražnje diskretnog tipa s vjerojatnošću $P_{(n)}$, onda se iz relacije troškova (3) odredi $T_{(n+1)}$ i $T_{(n-1)}$, tj.:

$$\begin{aligned} T_{(n+1)} &= Q_1 \sum_{m=0}^{n+1} (n+1-m) P_{(m)} + Q_2 \sum_{m=n+2}^{\infty} (m-n-1) P_{(m)} = \\ &= Q_1 \sum_{m=0}^n (n-m) P_{(m)} + Q_1 \sum_{m=0}^n P_{(m)} + \\ &+ Q_2 \sum_{m=n+1}^{\infty} (m-n) P_{(m)} - Q_2 \sum_{m=n+1}^{\infty} P_{(m)} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{Iz uvjeta } \sum_{m=0}^n P_{(m)} + \sum_{m=n+1}^{\infty} P_{(m)} = 1 \quad (9)$$

slijedi da je:

$$\sum_{m=0}^n P_{(m)} = 1 - \sum_{m=n+1}^{\infty} P_{(m)} \quad (10)$$

Ako izraz (10) uvrstimo u izraz (8), dobije se:

$$T_{(n+1)} = T_{(n)} - (Q_1 + Q_2) P_{(n+1)} - Q_2 \quad (11)$$

Analogno se dobije da je:

$$T_{(n-1)} = T_{(n)} - (Q_1 + Q_2) P_{(n-1)} + Q_2 \quad (12)$$

Ako se pretpostavi da u izrazima (11) i (12) postoji takav r koji zadovoljava uvjete:

$$\begin{aligned} (Q_1 + Q_2) P_{(m \leq r)} - Q_2 &> 0 \\ (Q_1 + Q_2) P_{(m \leq r-1)} + Q_2 &> 0 \end{aligned} \quad (13)$$

onda izraz (13) za bilo koje $n \neq r$, jer $P_{(m \leq r)}$ predstavlja neopadajuću funkciju kada r raste pa se jednažbe mogu napisati u obliku:

$$T_{(r+1)} > T_{(r)} \quad i \quad T_{(r-1)} > T_{(r)}$$

odnosno

$$T_{(r-1)} > T_{(r)} < T_{(r+1)}$$

Uvjet (13) može se pisati u obliku:

$$P_{(m \leq r)} > \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \quad \text{ i } \quad P_{(m \leq r-1)} < \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \quad (14)$$

Taj uvjet vrijedi kad je potražnja veća od zalihe ($m > n$). Ako je pak $m \leq n$, tj. potražnja manja od količine robe na skladištu ili jednaka njoj, onda će prosječna količina robe na skladištu biti:

$$\frac{1}{2} [n + (n - m)] = n - \frac{m}{2} \quad (15)$$

Ako relaciju (15) pomnožimo s vjerojatnošću $P_{(m)}$ i cijenom Q_1 , dobiju se troškovi za svako n i m kao zbroj:

$$Q_1 \sum_{m=1}^n (n - \frac{m}{2}) P_{(m)} \quad (16)$$

Ako je $m > n$, nastaju sljedeći troškovi:

Prosječna količina dijelova u skladištu u vremenu t_1 bit će $n/2$, a prosječni su troškovi proporcionalni s vremenom t_1 i ovise o Q_1 , prosječna količina $n/2$ o vremenskom razdoblju t_1 i vjerojatnosti potražnje $P_{(m)}$.

Odnos t_1 : t proporcionalan je n i m , pa će prosječni troškovi biti:

$$Q_1 \frac{n}{2} \frac{t_1}{t} P_{(m)} = Q_1 \frac{n}{2} \frac{n}{m} P_{(m)} = Q_1 \frac{n^2}{2r} P_{(m)}$$

Za svako prosječno " m " prosječni će troškovi biti:

$$Q_1 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{n^2}{2m} P_{(m)} \quad (17)$$

U trenutku t_2 pojavljuje se manjak rezervnih dijelova, i to prosječno $(m-n)/2$.

Kako je $t_2/t = (m-n)/2$, prosječni se troškovi mogu napisati u obliku:

$$Q_2 \frac{m-n}{2} \frac{t_2}{t} P_{(m)} = Q_2 \frac{m-n}{2} \frac{m-n}{m} P_{(m)} = Q_2 \frac{(m-n)^2}{2m} P_{(m)}$$

a prosječni troškovi za svako $m > n$ bit će:

$$Q_2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(m-n)^2}{2m} P_{(m)} \quad (18)$$

Na taj način moguće je odrediti funkciju ukupnih troškova kao zbroj troškova (17) i (18).

$$T_{(m)} = Q_1 \sum_{m=1}^n (n - \frac{m}{2}) P_{(m)} + Q_1 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{n^2}{2m} P_{(m)} + Q_2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(m-n)^2}{2m} P_{(m)} \quad (19)$$

Iz izraza (19) može se doći do optimalnog broja zaliha, kao i u izrazu (14), pa će biti:

$$\left\{ P_{(m \leq n-1)} + (n - \frac{1}{2}) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{P_{(m)}}{m} \right\} < \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} <$$

$$< \left\{ (n + \frac{1}{2}) \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{P_{(m)}}{m} + P_{(m \leq n)} \right\}$$

ili skraćeno:

$$f(n-1) < \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} f(n) \quad (20)$$

gdje je:

$$f(n) = \left\{ (n + \frac{1}{2}) \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{P_{(m)}}{m} + P_{(m \leq n)} \right\} \quad (21)$$

Optimalni opseg zaliha r dobije se preko funkcije $f(n)$ koja se može oblikovati s pomoću tablica.

ZAKLJUČAK

Predloženi matematički model može se uspješno koristiti u svakoj radnoj organizaciji kojoj su potrebne zalihe rezervnih dijelova za neprekidnu proizvodnju. Poznavanje broja rezervnih dijelova i cijene svakog dijela omogućuje kvalitetan prilaz problemima upravljanja zalihama. Navedeni model utječe na znatnu uštedu i materijala i novčanih izdataka.

Iz toga se zaključuje da nabavna i prodajna služba moraju studioznije pristupiti problemu kvalitativnog upravljanja zalihama.

Da bi dati model bio upotrebljiv u praksi, mora se prethodno definirati što se podrazumijeva pod pojmom optimalnih rezervi; to je ona količina koja osigurava neprekidnu proizvodnju uz minimalne troškove nabave i skladištenja.

SUMMARY

APPLICATION OF THE MATHEMATICAL MODEL IN THE PROCESS OF STOCK MANAGEMENT IN A TRANSPORT COMPANY

Warehousing of spare parts in a transport company appears to be a major problem. The proposed mathematical model from this paper represents a great scientific contribution in the area of storage of spare parts in a transport company.

LITERATURA

- [1] H. DŽANIĆ: Tehnologija materijala u prometu. Zagreb, FPZ, 1989, str. 263-274.
- [2] D. STOJANOVIĆ: Matematičke metode u ekonomiji i preduzeću. Beograd, Rad, 1968.
- [3] R. ACKOFF, M. SASIENI: Fundamentals of Operations Research. New York, 1968.
- [4] T. ZEČEVIĆ: Teorija operacionih istraživanja. Beograd, Udruženje studenata Ekonomskog fakulteta, 1970.
- [5] I. PETRIĆ: Operaciono istraživanje I. i II. Beograd, Fakultet org. nauka, 1973.