

TOMISLAV ŠIKIĆ, dipl. prof. mat.
Fakultet prometnih znanosti
Zagreb

Kvantitativne metode u prometu
Pregled

UDK: 656.011

Primljeno: 03.10.1989.

Prihvaćeno: 12.12.1989.

PRIMJENA MATEMATIČKE METODE ZA ODREĐIVANJE OPTIMALNE LOKACIJE U PROMETU

SAŽETAK

U ovom članku je potpuno riješen jedan konkretan problem minimizacije prijedanih putova s pomoću matematičke metode. Nadalje, u članku je prezentiran i program za računalo koji obavlja kompletan račun za navedenu metodu. Ukazano je i na to da uštede vremena, novca, goriva odnosno energije ostvarene primjenom spomenute matematičke metode nisu nikako zanemarljive.

1. UVOD

U današnje doba izvori energije predstavljaju veliko svjetsko pitanje iz dvaju razloga. Prvi razlog je taj što svijet danas potrebuje toliku energiju koju ne može dobiti ako se ne koristi konvencionalnim izvorima čije su količine gotovo iscrpljene. Drugi pak razlog, još novijeg datuma, jest zagađivanje čovjekove okoline koje je proporcionalno potrošnji energije. Budući da trenutno na vidiku nema novih čistih izvora energije koji bi podmirili ukupne potrebe svijeta, jedina perspektiva jest u štednji i racionalnom trošenju postojećih. S druge strane, pak, veliki dio ukupne svjetske potrošnje energije otpada na potrebe prometa. Dakle, oдавde je jasno od kolike je važnosti ušteda energije u prometu.

Jedan od načina - kako uštedjeti energiju svakako je biranje najkraćeg puta za prijevoz ljudi i robe, tj. odabir najkraćega mogućeg puta ujedno se minimizira potrošnja goriva odnosno energije. Dakako, ušteda energije automatski povlači za sobom smanjenje cijene prijevoza u prometu, a ujedno odabirom najkraćega mogućeg puta štedi se i vrijeme.

Minimiziranje prijedanih putova za jedan konkretan problem upravo je tema ovog članka. Umjesto definicijom problem je u ovom članku uveden sa sljedeća tri primjera.

Primjer 1. Lociranje remontnoga zrakoplovnog zavoda

Za potrebe određenog broja aerodroma treba izgraditi remontni zavod za zrakoplove. Pitanje glasi: gdje treba locirati zavod da bi ukupni zbroj udaljenosti koje zrakoplovi prelaze leteći od promatranih aerodroma do zavoda bio minimalan. Pretpostavka je da je broj letova iz pojedinog aerodroma do remontnog zavoda proporcionalan ukupnom broju slijetanja tijekom godine na taj aerodrom.

Primjer 2. Lokacija tvornice

Na nekom području treba izgraditi tvornicu u kojoj će se zapošljavati radnici iz mjesta i gradova s tog područja. Pitanje je: gdje treba smjestiti tvornicu da bi troškovi prijevoza radnika na radno mjesto bili minimalni. U ovom primjeru pretpostavlja se da će broj zaposlenih radnika iz pojedinog mjesta biti proporcionalan ukupnom broju građana tog mjesta odnosno grada.

Primjer 3. Lokacija centralnog skladišta

U određenom broju sabirnih skladišta privremeno se skladišti neka vrsta robe. Pitanje je: gdje treba izgraditi centralno skladište da bi ukupni troškovi prijevoza robe iz sabirnih skladišta do centralnog bili minimalni. I u ovom primjeru pretpostavka je da je količina prevezene robe iz pojedinoga sabirnog skladišta proporcionalna njegovom kapacitetu.

Ta tri primjera samo su neke od mogućih interpretacija promatranog problema. Dakle, pojmovi kao aerodrom, grad, sabirno skladište te remontni zrakoplovni zavod, tvornica ili centralno skladište ne trebaju se kruto shvatiti jer će ovisno o konkretnom problemu oni biti izmijenjeni.

Kao što je već napomenuto, tema ovog članka je minimizacija prijedanih putova za konkretan problem, tj., preciznije, pronalaženje odgovora na postavljena pitanja iz navedenih primjera.

Konstrukcijom matematičkog modela, koji će potpuno opisivati sve moguće interpretacije navedenih primjera, rješavanje promatranog problema svest će se na jedan matematički problem.

Srećom, taj matematički problem nije nerješiv, dapače postoji i praktična metoda za njegovo rješavanje. U nastavku članka bit će konstruiran navedeni matematički model i prezentirana metoda s pomoću koje je u potpunosti rješiv promatrani problem. Važno je napomenuti da je ta metoda primjerena slučaju kad se prijedani putovi mogu poistovjetiti sa zračnim linijama ili kada su prijedane udaljenosti velike.

2. KONSTRUKCIJA MATEMATIČKOG MODELA

Iz primjera slijedi da su relevantni podaci za problem točni položaji zadanih aerodroma, gradova odnosno sabirnih skladišta. Nadalje,

svakako su potrebni podaci o broju slijetanja zrakoplova, broju stanovnika ili količini robe koji pripadaju pojedinom aerodromu, gradu ili skladištu, ovisno o tome koji primjer promatramo. U preostalom dijelu teksta, zbog jednostavnosti zapisa, lokacije aerodroma, gradova ili skladišta zvat ćemo jednostavno točkama, a umjesto podataka o broju slijetanja zrakoplova, broju stanovnika ili količini robe govorit ćemo kraće o količini. Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da je problem konplanaran tj. da se sve točke mogu smjestiti u istu ravninu. Odatle slijedi da su sve lokacije točaka opisane u potpunosti s dvije koordinate. Doda li se tim koordinatama podatak o količini, može se reći da su sve točke s pripadnim količinama jednoznačno određene s tri koordinate. Dakle, matematičkim rječnikom govoreći, promatrani problem zadan je sa n točaka (x_k, y_k) $k = 1, \dots, n$ u koordinatnoj ravnini uz pripadne količine m_k .

Uz takvu notaciju funkcija koju želimo minimizirati može se zapisati na sljedeći način:

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^n m_k \times d_k \text{ gdje je } d_k = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2} \quad (1)$$

Primijetimo nadalje da tako napisan d_k nije ništa drugo nego udaljenost između točaka (x, y) i (x_k, y_k) . Odatle, pak, slijedi da je vrijednost funkcije f tj. funkcije (1) izračunane u točki (x, y) točno zbroj svih pojedinih "cijena prijevoza" od točke (x_k, y_k) do točke (x, y) . Riješiti problem, pišući u skladu s takvom notacijom, znači naći točku (x, y) u ravnini za koju funkcija $f(x, y)$ poprima minimum. Točku u kojoj funkcija (1) poprima minimum u daljnjem tekstu često ćemo zvati optimalnom lokacijom. Dakle, promatrani se problem svodi na određivanje ekstrema funkcije (1). Da bismo odredili optimalnu lokaciju odnosno točku minimuma, moramo nešto više doznati o samoj funkciji.

3. MATEMATIČKO RJEŠENJE PROBLEMA

Funkcija f dobro je definirana za svaki uređeni par (x, y) , tj. domen funkcije f je čitava ravnina R_2 . Nadalje, kako je $m_k \geq 0$ i $d_k \geq 0$ za svaki $k = 1, \dots, n$, jasno je da funkcija f poprima samo nenegativne vrijednosti, odnosno možemo pisati:

$$f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in R^2 \quad (2)$$

Budući da točaka (x_k, y_k) ima konačno mnogo, možemo odabrati kružnicu sa središtem u ishodištu tako da se svih n točaka nalazi unutar te kružnice i da sve točke izvan toga kruga ne konkuriraju za točku minimuma. Interesantno je zapaziti da će to vrijediti za svaku takvu kružnicu čiji je polumjer veći od maks $\{\sqrt{x_k^2 + y_k^2} \mid \forall k = 1, \dots, n\}$. Dakle, točke koje konkuriraju za minimum funkcije $f(x, y)$ nalaze se unutar neke takve kružnice. Iz činjenice da je funkcija $f(x, y)$ neprekidna, te da je krug ome-

den kružnicom kompaktan skup, uz pomoć *Boltzano-Weierstrassove teoreme* [1] slijedi da minimum postoji.

Dakle, pokazano je da minimum postoji, ali nije opisan i način kako ćemo ga izračunati. Da bismo to mogli učiniti, moramo još bolje upoznati funkciju (1). Spomenuto je da je neprekidna. Pogledajmo je li diferencijabilna. U tu svrhu promotrimo parcijalne derivacije funkcije (1):

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \sum_{k=1}^n m_k \times \frac{(x-x_k)}{d_k} \quad (3)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \sum_{k=1}^n m_k \times \frac{(y-y_k)}{d_k}$$

Odatle slijedi da je funkcija diferencijabilna u svim točkama koordinatne ravnine, osim u onih n točaka (x_k, y_k) koje su zadane. No, direktnim računom parcijalnih derivacija s pomoću limesa za točke (x_k, y_k) dobiva se da one postoje i u točkama (x_k, y_k) . Odatle slijedi da je funkcija (1) diferencijabilna u svim točkama ravnine. Također, na osnovi izraza (3), može se zaključiti da su parcijalne derivacije funkcije (1) neprekidne ondje gdje imaju smisla. Dakle, promatrana funkcija (1) neprekidno je diferencijabilna u svim točkama ravnine osim u zadanim točkama (x_k, y_k) . Budući da je funkcija (1) diferencijabilna, minimum ćemo tražiti određivanjem stacionarne točke, tj. određivanjem točke (x, y) za koju je sljedeći sustav jednadžbi zadovoljen:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

Dakle, riješiti sustav (4) znači naći stacionarne točke, tj. eventualne točke minimuma. Pokažimo, ako takva točka postoji, da je ona sigurno minimum. U tu svrhu uvedimo sljedeće oznake:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = A \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = C \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = B$$

Da bi se pokazalo da je točka koja je rješenje sustava (4) minimum funkcije (1), dovoljno je provjeriti da je za nju zadovoljeno $AC - B^2 > 0$ i $A > 0$. Ali, konkretno za funkciju (1), ove nejednadžbe ne samo da su zadovoljene za stacionarnu točku, već za svaku točku za koju izrazi $AC - B^2$ i A imaju smisla, tj. izračunljivi su. Budući da je ta činjenica zanimljiva i s matematičkog stajališta, ispišimo skicu tog izvoda. Izračunajmo direktno izraz $AC - B^2$:

$$AC-B^2 = \left[\sum_{k=1}^n m_k \frac{(x-x_k)^2}{d_k^3} \right] \left[\sum_{l=1}^n m_l \frac{(y-y_l)^2}{d_l^3} \right] - \left[\sum_{s=1}^n m_s \frac{(x-x_s)(y-y_s)}{d_s^3} \right]^2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{m_k m_l}{d_k d_l} [(x-x_k)(y-y_l) - (x-x_l)(y-y_k)]^2 \quad (6)$$

Analogni račun za izraz A još je jednostavniji, pa ga nije potrebno eksplicitno ispisivati. Iz (6) slijedi da je $AC-B^2 > 0$, budući da se sastoji od sumanada koji je svaki posebno veći od nule.

Riješimo sada sustav (4). Da bi se promatrali sustav mogao riješiti, mora se primijeniti neka od numeričkih metoda za određivanje rješenja sustava jednadžbi. U ovom članku bit će primijenjena metoda iteracije. Sustav (4) se, naravno, može riješiti i nekim drugim postupkom, npr. Newtonovom metodom [2].

4. NUMERIČKO RJEŠENJE PROBLEMA

Kao što je navedeno, sustav (4) rješava se metodom iteracije. Da se opravda izbor takvog postupka za rješavanje sustava (4), kratko prezentirajmo općenito metodu iteracije za sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice. Napomenimo da se metoda iteracije uglavnom koristi za nelinearne sustave. Metoda iteracije primjenjuje se za sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice koji se može zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} x &= \Phi(x, y) \\ y &= \Psi(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

Za sustav oblika (7) odabere se početno približenje, tj. početna aproksimacija (x_0, y_0) . Da bi se provjerilo da je to valjana aproksimacija, moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) \right| + \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x_0, y_0) \right| & M < 1 \\ \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) \right| + \left| \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x_0, y_0) \right| & M < 1 \end{aligned} \quad (8)$$

Ako je uvjet (8) zadovoljen za sustav (7), onda s pomoću jednakosti:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi(x_0, y_0) \\ y_1 &= \Psi(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (9)$$

tj.

$$(x_1, y_1) = (\Phi(x_0, y_0), \Psi(x_0, y_0)) \quad (10)$$

definiramo novo približenje. Nadalje, postupak se ponovi za aproksimaciju (x_1, y_1) i tako redom, dok razlika između uzastopne dvije aproksimacije ne bude manja od željene točnosti.

Naravno, uvjet (8) jamči da ćemo željenu točnost dobiti nakon konačnog broja koraka. Dakle, iz $(n-1)$ -ve aproksimacije dobit ćemo n -tu aproksimaciju s pomoću rekurzivne formule:

$$(x_n, y_n) = (\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}), \Psi(x_{n-1}, y_{n-1})) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} x_n &= \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n &= \Psi(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned} \quad (12)$$

Da bi se metoda iteracije mogla primijeniti za sustav (4), mora ga se transformirati u oblik (7). Sustav (4) zapisan u obliku (7) glasi:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sum_{k=1}^n \frac{m_k x_k}{d_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{d_k}} \\ y &= \frac{\sum_{k=1}^n \frac{m_k y_k}{d_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{d_k}} \end{aligned} \quad (13)$$

Interesantno je primijetiti da ponderirano težište izračunano za zadane točke (x_k, y_k) i njihove pripadne količine m_k donekle aproksimira optimalnu lokaciju, jer se ono priklanja uvijek "najtežoj" točki od zadanih. Budući da globalno takvu logiku prati i optimalna lokacija, za početnu aproksimaciju ima smisla odabrati ponderirano težište (x_T, y_T) , tj. možemo pisati:

$$(x_0, y_0) = (x_T, y_T) \quad (14)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \\ y_T &= \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \end{aligned} \quad (15)$$

Napomenimo da je ponderirano težište samo prva aproksimacija a ne krajnje rješenje. Ako pak u nekim konkretnim slučajevima ponderirano težište ne bi zadovoljavalo uvjet (8), onda treba naći novu početnu aproksimaciju. Kad je zadovoljen uvjet (8), onda će metoda iteracije voditi do rješenja sustava (7) uz željenu točnost. Time je teorijski problem riješen. No, praktično rješavanje nekoga konkretnog zadatka može iziskivati dugotrajno računanje. Zato ćemo u pomoć pozvati računalo.

U preostalom dijelu članka prezentiran je kompjutorski program koji će u potpunosti obaviti račun umjesto nas.

5. RAČUNARSKO RJEŠENJE PROBLEMA

U ovom dijelu članka eksplicite je ispisan program koji će rješavati problem. Podaci koje program jedino zahtijeva jesu koordinate točaka i pripadne količine te na kraju željena točnost.

Program je pisan u programskom jeziku "GfA-Basic" na računalu "ATARI 1040ST".

Važno je također napomenuti da je program napisan što je moguće kraće, s vrlo jednostavnim upisom i ispisom da bi čitalac što lakše mogao proniknuti u bit programa, te ga prilagoditi svom računalu, odnosno programskom jeziku kojim se koristi. Dakako, program koji će biti ispisan u ovom članku može se bez preinaka primijeniti samo uz pripadni programski prevodilac za programski jezik "GfA-Basic".

Okosnicu programa čine:

- upis podataka (broj točaka, pripadne količine i koordinate),
- izračunavanje ponderiranog težišta za upisane točke,
- petlja koja iz ponderiranog težišta generira nove aproksimacije i
- ispis rješenja (optimalne lokacije).

Ispis programa:

```
Print "Program za određivanje optimalne lokacije metodom iteracije"
Input "Broj točaka "; N
Dim M(N), X(N), Y(N)
Print "Količine X-koordinate Y-koordinate"
O = 0
P = 0
R = 0
For I = 1 To N
Input M(I), X(I), Y(I)
O = O + M(I) * X(I)
P = P + M(I) * Y(I)
R = R + M(I)
Next I
X = O/R
Y = P/R
Print "Početno približenje: ", X, Y
Input "željena točnost"; T
K = 0
S:
L = 0
A = 0
B = 0
For I = 1 To N
D = Sqr (((X-X(I))**2 + (Y-Y(I))**2)) (16)
L = L + M(I)/D
A = A + M(I) * X(I)/D
B = B + M(I) * Y(I)/D
Next I
U = A/L
V = B/L
Z = Sqr ((X - U) **2 + (Y - V) **2)
X = U
Y = V
K = K + 1
Print "Broj iteracije X-koordinata Y-koordinata"
Print K, X, Y
If K > 100
```

Print "Morate generirati novu početnu aproksimaciju ili smanjiti točnost"

```
Goto R
Else
If Z>T
Goto S
Endif
Endif
Print "Optimalna lokacija je u točki koja ima koordinate":
Print X, Y;" Uz točnost od "; T
R:
End
```

Napomena: Ako ponderirano težište ne bi zadovoljavalo uvjet (8), onda treba naći novu početnu aproksimaciju. Novo početno približenje može se definirati s pomoću metode "Monte Carlo" na sljedeći način.

Funkcija (1) se s pomoću programa za metodu "Monte Carlo" približno minimizira, te se to približno rješenje uzme za početnu aproksimaciju. Taj program se zasniva na *Random* naredbi za generiranje slučajnih brojeva. Takav već gotov program može se naći u knjizi [3] na stranici 141.

Primjer

Na kraju članka prezentirajmo rješavanje problema s pomoću programa (16) za konkretno zadane podatke. Dakle, riješit ćemo problem za npr. šest točaka koje su zadane sljedećom tablicom:

točka	"količina"	x-koordinata	y-koordinata
1	1	2	3
2	22	46	2
3	3	12	1
4	10	10	5
5	4	5	6
6	14	2	6

Kad program počne s radom, prvo će tražiti da se upiše ukupni broj točaka i pripadne količine, te ravninske koordinate. Iz tih podataka računalno će izračunati ponderirano težište i poistovjetiti ga s početnom aproksimacijom. Zatim treba upisati željenu točnost (u ovom primjeru je 10^{-5}). Kako radi taj dio programa, vidi se iz sljedećeg ispisa:

Program za određivanje optimalne lokacije metodom iteracije

```
Broj točaka ? 6
Količine X Y
? 1 2 3
? 22 46 2
? 3 12 1
? 10 10 5
? 4 5 6
? 14 2 6
```

Početno približenje: 22.185185185 3.8518518519
Željena točnost? 10e-5

Nadalje, program iz početne aproksimacije

generira nova približenja. Kad se postigne željena točnost, program će prestati s radom i ispisati krajnje rješenje.

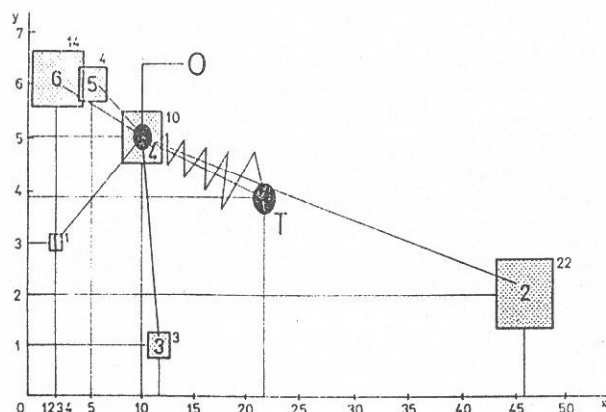
Iz sljedećeg ispisa vidi se kako računalo generirajući nova približenja korak po korak teži k rješenju promatranog problema. Za taj primjer trebao je 21 iterativni korak. Primijetimo da se posljednja aproksimacija podudara s krajnjim rješenjem:

Broj iteracije	x-koordinata	y-koordinata
1	18.909405535	3.9718912404
2	16.156875113	4.1297406729
3	14.035183253	4.2325111365
4	12.555687412	4.3217084769
5	11.598857296	4.4629849489
6	10.981892303	4.6306526515
7	10.579478936	4.7670416145
8	10.325532858	4.8610771646
9	10.174981095	4.9212004699
10	10.091143025	4.9572347706
11	10.046584798	4.9775492772
12	10.023568558	4.9884636222
13	10.011861724	4.9941448038
14	10.005954108	4.9970479956
15	10.002984771	4.9985168478
16	10.001495264	4.9992561502
17	10.000748825	4.9996272686
18	10.000374948	4.9998133143
19	10.000187726	4.999906518
20	10.000093986	4.9999531946
21	10.000047053	4.9999765664

Optimalna lokacija je u točki koja ima koordinate:

10.000047053 4.9999765664 UZ TOČNOST OD 0.0001.

Zbog lakšeg uvida u to koliki je otklon, a time ujedno i poboljšanje optimalne lokacije u odnosu na težište, promotrimo sliku 1.



Slika 1.

Točke na slici su numerirane kao u tablici (17). Broj uz svaku točku je pripadna količina. Na temelju rezultata dobivenih s pomoću računala unijete su na sliku i točke koje odgovaraju ponderiranom težištu odnosno optimalnoj lokaciji. Točka težišta označena je s T a optimalna lokacija s O. Iz slike je vidljivo da otklon optimalne lokacije od težišta ne može biti zanema-

ren. Razmak u ovom konkretnom primjeru jest 12.24 mjernih jedinica duljine.

Budući da je u uvodu ovog članka napomenuto da je ova metoda primjerena slučajevima kada su udaljenosti velike, pretpostavimo da je mjerna jedinica duljine 10 kilometara. Tada je razmak između težišta i optimalne lokacije za primjer zadan tablicom (17) jednak 122.4 km. Dakle, i za mjernu jedinicu od 10 km vidi se da je otklon optimalne lokacije od težišta vrlo velik. Koliko je poboljšanje za veće mjerne jedinice, suvišno je diskutirati. Primijetimo da se za naš konkretan primjer optimalna lokacija podudarila s jednom od zadanih točaka. To je slučajnost koja se ne može poopćiti.

6. ZAKLJUČAK

Minimiziranje prijedanih putova za jedan konkretan prometni model tema je razmatranja ovog članka. Matematičkom interpretacijom promatranoga prometnoga modela problem minimizacije sveden je na jedan rješiv matematički problem. U članku je prezentirana matematička metoda s pomoću koje je u potpunosti riješen spomenuti matematički problem, pa je time ujedno i riješen problem minimizacije prijedanih putova.

Budući da praktično rješavanje promatranog problema iziskuje dugotrajno računanje, u članku se nalazi i program za računalo koji obavlja kompletan račun umjesto nas.

Na kraju članka riješen je jedan proizvoljno odabran primjer promatranog problema. Osim što je u tom dijelu članka prezentiran rad kompjutorskog programa s konkretnim podacima ukazano je i na sljedeće:

- ponderirano težište je samo jedna početna aproksimacija, a nikako krajnje rješenje promatranog problema,
- budući da je metoda "Monte Carlo" približni postupak, njena primjena je u ovom slučaju neosnovana. Eventualno se s pomoću nje može izvršiti generiranje početne aproksimacije.

Dakle, u ovom članku potpuno je riješen jedan konkretan problem minimizacije prijedanih putova i ukazano je na to da uštede goriva, novca, vremena, te nadasve energije, ostvarene određivanjem optimalne lokacije nikako nisu zanemarljive.

SUMMARY

APPLICATION OF MATHEMATICAL METHOD FOR OPTIMUM SITING OF TRAFFIC FACILITIES

This paper provides a definite solution to a concrete problem of minimizing journeys by means of a mathematical method. This paper further presents a computer program furnishing a complete calculation for the respective method applied. As reiterated, savings in terms of time, money, fuel, i.e. energy obtained through the application of respective mathematical method are by no means negligible.

LITERATURA

- [1] S. MARDEŠIĆ: Matematička analiza 1. ŠK, Zagreb, 1979.
- [2] F. SCHEID: Numerical analysis. Mc Graw Hill, NY, 1968.
- [3] MLADENOVIĆ, GRBOVIĆ, PETROVIĆ: Kućni kompjutori - algoritmi i programi. NIRO TK, Beograd, 1985.
- [4] K.Ju. RIHTER: Transportnaja ekonometrija. (prijevod s ruskog), Transport, Moskva, 1983.