

Dr. MARIJANA GJUMBIR
TOMISLAV ŠIKIĆ, prof. mat.
Fakultet prometnih znanosti
Zagreb

Kvantitativne metode u prometu
Pregled

UDK: 519.27.656

Primljeno: 04.12.1989.

Prihvaćeno: 12.12.1989.

SVOJSTVA NEGATIVNE BINOMNE RAZDIOBE I NJENE PRIMJENE U PROMETU

SAŽETAK

U radu su opisane glavne značajke negativne binomne razdiobe. U dva primjera ilustrirana je primjena u prometu.

1. UVOD

O primjenama diskretnih i kontinuiranih slučajnih varijabli te njihovih razdioba u prometu postoji već opsežna literatura na našem jeziku. To su na primjer udžbenici [1] i [2] ili radovi namijenjeni opisu samo jedne razdiobe [3], [4].

Motivacija za ovaj članak pronađena je u činjenici da negativna binomna razdioba zauzima skromno mjesto u literaturi. U mnogim knjigama diskretne teorije vjerojatnosti odnosno matematičke statistike ona je vrlo šturo obrađena a u nekima nije ni spomenuta.

Naročito je uočeno pomanjkanje adekvatnih primjera, pa su zato u ovom radu, uz prezentiranje najvažnijih svojstava i tvrdnji o negativnoj binomnoj razdiobi, izložena i dva primjera primjene u prometu.

2. OSNOVNI POJMOVI I DEFINICIJE

Ponavljjanje nezavisnih pokusa često se pojavljuje u raznim primjenama. Shema nezavisnih pokusa koja je vrlo učestala u primjeni jest Bernoullijeva. Dakle, Bernoullijevom shemom naziva se specijalan niz n ponovljenih nezavisnih pokusa, kada se pod istim uvjetima ponavlja slučajni pokus koji ima samo dva moguća ishoda. Često se ishodi takvih pokusa nazivaju "uspjeh" i "neuspjeh". Ako se s p označi vjerojatnost uspjeha u pojedinom pokusu, onda je $q = 1 - p$ vjerojatnost protivnog događaja ili "neuspjeha".

Binomna slučajna varijabla $X \sim B(n, p)$ jedna je od najpromatranijih slučajnih varijabli za Bernoullijevu shemu, pa stoga zakon njezine razdiobe nosi i ime Bernoullija. Slučajna varijabla $X \sim B(n, p)$ predstavlja broj uspjeha u n Bernoullijevih pokusa, a vjerojatnost tog događaja je:

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x=0,1,2,\dots,n \quad (1)$$

Matematičko očekivanje navedene razdiobe jednako je [5], [6]:

$$E[X] = np \quad (2)$$

a varijanca:

$$V[X] = npq \quad (3)$$

Pretpostavi li se da je broj ponavljanja nezavisnih pokusa neograničen tj. $n \rightarrow \infty$, može se promatrati slučajna varijabla čija je razdioba vjerojatnosti definirana zakonom:

$$P(Y=y) = \binom{-k}{y} p^k (-q)^y \quad y=0,1,2,3,\dots \quad (4)$$

gdje je:

$$\binom{-k}{y} = \frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-y+1)}{y!}$$

Za tako konstruiran beskonačni niz nezavisnih pokusa navedena razdioba (4) naziva se **NEGATIVNA BINOMNA RAZDIOBA**. Naziv dolazi otuda što izraz $\binom{-k}{y} (-q)^y$ na desnoj strani formule (4) predstavlja opći član razvoja izraza $(1-q)^{-k}$ u red potencija.

Nadalje, prema navedenom i iz formule (4) slijedi:

$$\sum_{y=0}^{\infty} P(Y=y) = \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-k}{y} p^k (-q)^y = p^k (1-q)^{-k} = 1$$

tj. tvrdnja da je zbroj vjerojatnosti svih događaja jednak 1 proizlazi trivijalno iz zapisa (4). Budući da vrijedi:

$$(-1)^y \binom{-k}{y} = \binom{k+y-1}{y}$$

može se (4) zapisati i ovako:

$$P(Y=y) = \binom{k+y-1}{y} p^k q^y \quad (5)$$

Budući da je:

$$\binom{k+y-1}{y} = \binom{y+k-1}{k-1},$$

izraz (5) može se zapisati i u obliku:

$$P(Y=y) = \binom{y+k-1}{k-1} p^k q^y \quad (6)$$

Iz relacija (5) i (6) jasno je da slučajna varijabla Y negativne binomne razdiobe mjeri broj neuspjeha do pojave k -tog uspjeha. Zanimljivo je napomenuti da se u slučaju za $k=1$ negativna binomna razdioba podudara s dobro znanom geometrijskom [5], koje je zakon distribucije dan sa:

$$P(Y=y) = p q^y \quad (7)$$

Negativnoj binomnoj razdiobi pripada matematičko očekivanje:

$$E[Y] = k q/p$$

i varijanca:

$$V[Y] = k q/p^2$$

Oдавде se vidi da je omjer $E[Y]/V[Y] = p < 1$, pa ova značajka može biti i kriterij za raspoznavanje te razdiobe.

Za izračunavanje vrijednosti funkcije vjerojatnosti mogu se općenito primijeniti i rekurzivne formule. U slučaju binomne razdiobe promatra se omjer:

$$\frac{P(X=x+1)}{P(X=x)} = \frac{\binom{n}{x+1} p^{x+1} q^{n-x-1}}{\binom{n}{x} p^x q^{n-x}} = \frac{(n-x)p}{(x+1)q}$$

iz kojega slijedi da rekurzivna formula za binomnu razdiobu glasi:

$$P(X=x+1) = \frac{p(n-x)}{q(x+1)} P(X=x) \quad (8)$$

Analognim postupkom dobiva se rekurzivna formula za negativnu binomnu razdiobu. Iz omjera:

$$\frac{P(Y=y+1)}{P(Y=y)} = \frac{k+y}{y+1} q$$

slijedi da vrijedi:

$$P(Y=y+1) = (1-p) \frac{k+y}{y+1} P(Y=y) \quad (9)$$

Tako dobivena rekurzivna formula omogućuje izračunavanje vjerojatnosti $P(Y=y+1)$ iz prethodnih, gdje je početna $P(Y=0) = p^k$.

Na primjer, ako se slučajna varijabla pokorava negativnoj binomnoj razdiobi za $p=0.9$; $k=4$ te $y=2$, onda vjerojatnost da se uspjeh ponovi četiri puta i neuspjeh dvaput iznosi:

$$P(Y=2) = 0.06561$$

Matematičko očekivanje iste je 0.444445 a varijanca 0.493827.

Funkcija distribucije za diskretne slučajne varijable općenito je definirana sa:

$$F(Y) = \sum_{j=0}^y P(Y=j)$$

Funkciju distribucije negativne binomne razdiobe pogodno je računati i rekurzivnom formulom (9). Tako za navedeni primjer vrijedi:

$$F(2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$$

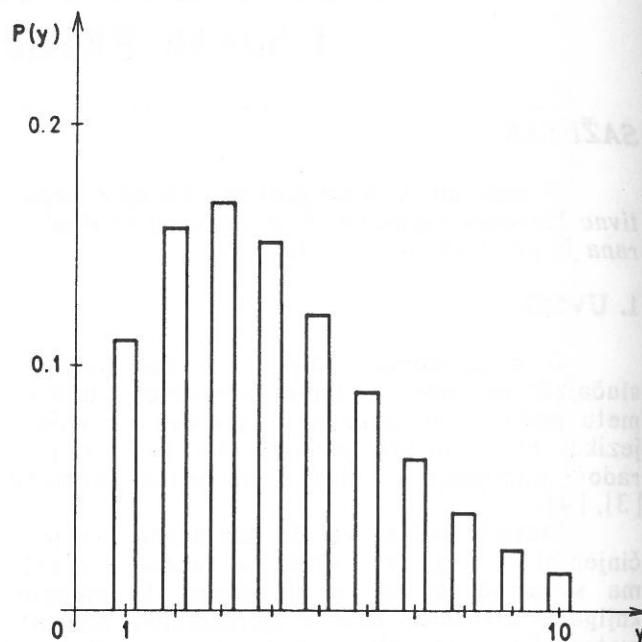
gdje su:

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= 0.6561 \\ P(Y=1) &= 0.26244 \\ P(Y=2) &= 0.06561 \end{aligned}$$

redom izračunane vjerojatnosti s pomoću rekurzivne formule. Dakle,

$$F(2) = 0.984151$$

Na slici 1. dan je grafički prikaz funkcije vjerojatnosti negativne binomne razdiobe određene parametrima $k=6$ i $p=0.6$.



Slika 1. Funkcija razdiobe vjerojatnosti negativne binomne razdiobe za $k=6$ i $p=0.6$

Vjerojatnosti $P(y)$ unijete su u koordinatni sustav na slici 1. na osnovi tablice 1. Podaci iz tablice 1 također su izračunani primjenom rekurzivne formule (9).

Tablica 1.

y	P(y)
0	0.047
1	0.112
2	0.157
3	0.167
4	0.150
5	0.120
6	0.088
7	0.061
8	0.039
9	0.024
10	0.015

Pri prilagođavanju teorijskih razdioba empirijskim podacima, stvarne vrijednosti parametara procjenjuju se iz samih empirijskih vrijednosti. Očekivanje $E[X]$ procjenjuje aritmetička sredina $\bar{x}$ empirijskih podataka:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N},$$

a varijancu veličina:

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N-1}$$

ili

$$s^2 = \frac{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{N(N-1)}$$

gdje je s N označen broj podataka.Zato se parametre k i p pri negativnoj binomnoj razdiobi može procijeniti iz sustava jednažbi:

$$\bar{x} = kq/p$$

$$s^2 = kq/p^2$$

(10)

Pritom je nužno napomenuti da k ne mora biti prirodan broj. Drugim riječima, negativna binomna razdioba (4) može se formalno proširiti na sve vrijednosti k iz polja realnih brojeva. To je ostvarljivo ako se vjerojatnost (4) izrazi s pomoću Γ (gama) funkcije, tj. može se pisati:

$$P(Y=y) = \frac{\Gamma(k+y)}{y! \Gamma(k)} p^k q^y \quad (11)$$

Ta činjenica i omogućuje da se konkretni primjeri iz prakse mogu aproksimirati negativnom binomnom razdiobom bez ograničenja na parametar k .

3. ODABRANI PRIMJERI PRIMJENE NEGATIVNE BINOMNE RAZDIOBE U PROMETU

Primjer 1. U knjizi [7] ilustrirana je mogućnost opisivanja protoka vozila negativnom binomnom razdiobom.

Ako se na primjer protok vozila mjeri u vremenskim intervalima od 10 sekundi, u blizini semafora, onda će u određenim vremenskim intervalima protok vozila biti vrlo velik, dok će u nekim njegove vrijednosti biti vrlo male, ovisno o tome je li semafor otvoren ili nije. Posljedica je razdioba protoka vozila, koja ima veliko rasipanje, a to je upravo osobina negativne binomne razdiobe.

Tablica 2. sadrži rezultate mjerenja za jedno raskrižje.

Tablica 2.

Broj vozila u 10-sekundnim intervalima	Empirijske frekvencije	Teorijske frekvencije	$(f_i - f_{ti})^2$
y_i	f_i	f_{ti}	f_{ti}
0	139	140.4	0.01
1	128	122.0	0.30
2	55	62.2	0.83
3	25	24.2	0.03
4	10	8.0	1
5	3	2.3	11.2
> 5	0	≈ 0.9	0.29
	360	360	$\chi^2 = 1.46$

Procjenu matematičkog očekivanja daje aritmetička sredina empirijskih podataka tj.:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i f_i}{N} = 1.0222222$$

a procjenu varijance mjera kvadratnog odstupanja populacije empirijskih podataka od očekivanja:

$$s^2 = \frac{N \sum f_i y_i^2 - (\sum f_i y_i)^2}{N(N-1)} = 1.2028474$$

Iz (10) je pak jasno da su procjene parametara pretpostavljene negativne binomne razdiobe jednake:

$$p = \frac{\bar{y}}{s^2} = 0.8498353$$

$$k = \frac{\bar{y} p}{1-p} = 5.7851187$$

Nadalje, primjenom rekursivne formule (9) i relacije:

$$f_{ti} = N P(Y=y)$$

izračunane su teorijske frekvencije u tablici 2. Testiranje hipoteze provedeno je χ^2 -testom uz $\alpha_2 = 0.05$. Budući da je izračunani χ^2 jednak 1.46, χ_0^2 za odgovarajući stupanj slobode (ovdje je $5-3=2$) jednak 5.991 (tablice knjige [6]) prihvaća se hipoteza da se navedeni protok vlada po zakonu negativne binomne razdiobe jer je

$$\chi^2 < \chi_0^2$$

Primjer 2. U radu [8] razmatran je primjer koji se odnosi na kupnju robe široke potrošnje koja je neophodna za svakodnevni život prosječne obitelji, a unaprijed je pakirana i vagana. Dakle, radi se o proizvodima neophodnim svakom domaćinstvu, ali koji se ne kupuju svakodnevno, kao na primjer deterđenti, šamponi, kava, kakao i slično.

Slučajna varijabla Y je broj jedinica ro-

Tablica 3.

y_i	f_i	f_{ti}	y_i	f_i	f_{ti}
0	1612	1612	14	—	1.8
1	164	156.9	15	—	1.5
2	71	74.0	16	—	1.2
3	47	44.2	17	2	0.9
4	28	29.2	18	—	0.8
5	17	20.3	19	—	0.6
6	12	14.7	20	1	0.5
7	12	10.8	21	—	0.4
8	5	8.2	22	2	0.3
9	7	6.2	23	—	0.3
10	6	4.8	24	—	0.2
11	3	3.8	25	1	0.2
12	3	2.9	26	2	0.1
13	5	2.3	> 27	—	0.9
			2000	2000	

be kupljene tijekom jednog tjedna. Frekvencija f_j je broj obitelji, od 2000 promatranih, koje su kupile y jedinica promatranog proizvoda tijekom 26 tjedana koliko je trajalo promatranje.

Rezultati ispitivanja su dani u tablici 3. Analognim postupkom kao u primjeru 1. pokazano je i za te podatke da se raspoređuju po zakonu negativne binomne razdiobe.

Takvo ispitivanje vladanja potrošača i pravilnosti njihovih kupovnih navika interesantni su i u prometu radi planiranja zaliha i optimiziranja prijevoza roba.

SUMMARY

CHARACTERISTICS OF BINOMIAL DIVISION AND ITS APPLICATION IN TRANSPORT

This paper deals with the major characteristics of negative binomial division. The two examples provided illustrate its application in transport.

LITERATURA

- [1] S. SKOK: Matematičke i statističke metode. Primjene u prometnom inženjerstvu. Zagreb, VŠCS, 1975, 190.
- [2] S. VUKADINOVIĆ: Elementi teorije vjerojatnoće i matematičke statistike. 2. izdanje, Beograd, Privredni pregled, 1978, 492.
- [3] S. VUKADINOVIĆ: Poissonova raspodela vjerojatnoće u primeni na probleme saobraćaja. Tehnika, Saobraćaj, 1, 1967, 146-148.
- [4] M. GJUMBIR, G. ŠTEFANČIĆ: Primjena Erlangove razdiobe u prometnoj tehnologiji. Suvremeni promet, 10, 1988, 3, 225-228.
- [5] N. SARAPA: Teorija vjerojatnosti. Zagreb, Školska knjiga, 1987, 155.
- [6] I. PAVLIĆ: Statistička teorija i primjena. Zagreb, Tehnička knjiga, 1977, 88-90.
- [7] LJ. KUZOVIĆ: Teorija saobraćajnog toka. Beograd, Građevinska knjiga, 1987, 147-149.
- [8] A.S.C. EHRENBURG: The Pattern of Consumer Purchases. Applied Statistics, 8, 1959, 26-41.